Шифр: 11-27

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Выборгский

Школа СОШ г. Светогорска

Класс 11А

ФИО Молчанов Иван Романович

1	2	3	4	5	Σ	11-27
2	–	0	–	–	2	

№1

назовём a, b – два наибольших числа, тогда:

$a \cdot b = 7 \cdot 11$ или $a \cdot b = (-7) \cdot (-11)$, но нас интересует наибольшее n, поэтому мы берем первый случай.

назовём c, d – два наименьших числа, ~~тогда~~, чтобы получить наибольшее n, нужно взять наименьшие c и d, поэтому $c \cdot d = (-7) \cdot (-11)$, наша последовательность в убывающем порядке:

$11 \quad 7 \quad \underbrace{\ldots\ldots}$ $-7 \quad -11$

сюда поставим максимальное количество чисел от 6 до -6:

$11; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -11$

при $n = 17$

Ответ: $n = 17$

~~№5~~

~~Чтобы минимизировать разность между наибо~~

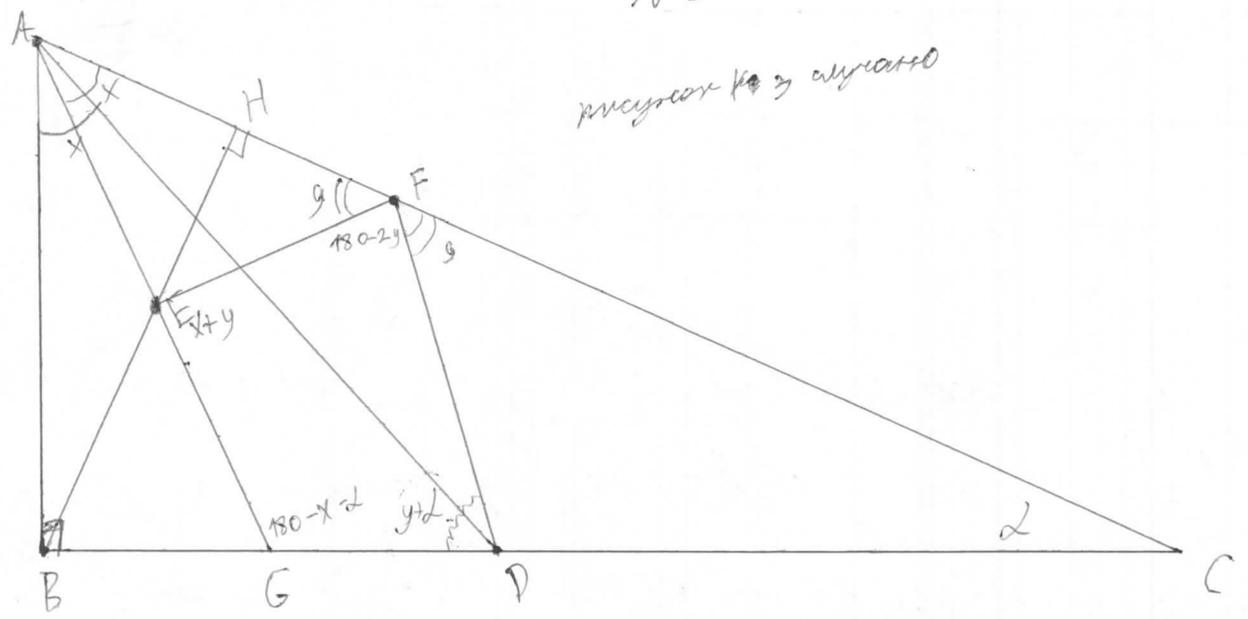
~~№4~~

~~пусть $y = 1$, т.к. для любого p оно подходит~~

См. на обратной стороне →

№2

рисунок к 3 случаю



задача делится на 3 случая:

1). $\angle BAD < \frac{1}{2}\angle CAB$

2). $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle CAB$

3). $\angle BAD > \frac{1}{2}\angle CAB$

пусть $\angle BAE = x$; $\angle DFC = y$; $\angle ACB = \alpha$, то

$\angle FDB = y + \alpha$ $\qquad \angle FEG = x + y$

$\angle EFD = 180 - 2y$ $\qquad \angle EGD = 360 - 180 + \cancel{2y} - x - \cancel{y} - \cancel{y} - \alpha =$

$= 180 - x - \alpha$

$\angle GAD = \cancel{180} - \cancel{180} + x + \cancel{\alpha} - y - \cancel{\alpha} = x - y$

$\angle CAB = 2x - \angle GAD = 90 - \alpha$

$90 - \alpha = 2x - x + y$

$90 - \alpha = x + y$ $\qquad \angle ADB = 90 - x$

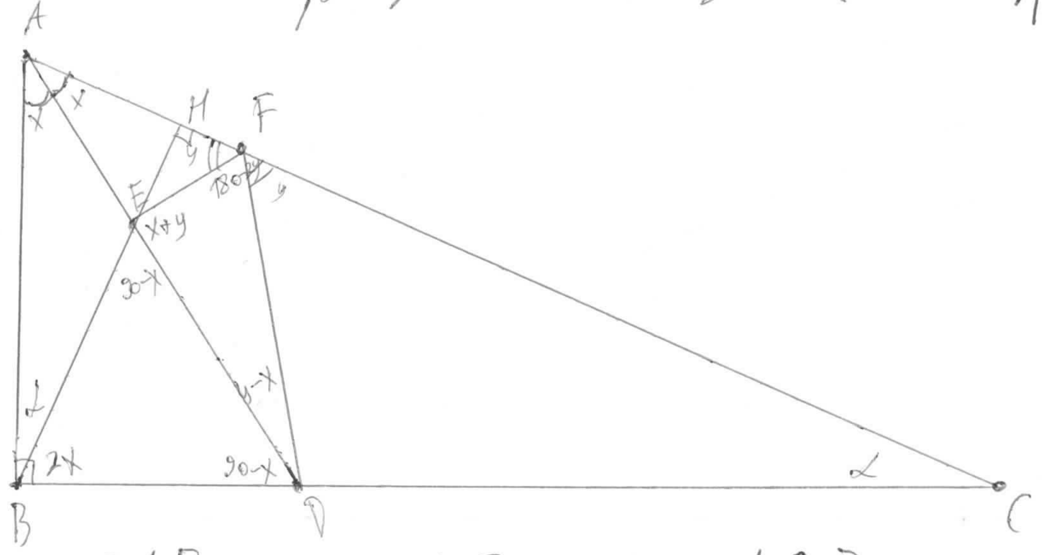
$\angle BAC = 2x - \angle GAD = 90 - \alpha$

$\angle GAD = \cancel{180} - \cancel{180} + x + \alpha - 90 + x = 2x + \alpha - 90$

$90 - \alpha = \cancel{2x} - \cancel{2x} + \alpha - 90$

$\alpha = 90^\circ$ – не может быть

рисунок к 2 случаю: 11-27



пусть $\angle BAE = x$; $\angle DFC = y$; $\angle ACB = \alpha$, то

$\angle FDB = \alpha + y$ $\quad \angle EFD = 180 - 2y$

$\angle ADC = 180 - x - \alpha$ $\quad \angle AED = 90 - x$

$\angle FED = x + y$ $\quad \angle FDE = \cancel{180} - \cancel{180} + 2y - x - y = y - x$

$\angle ADB = 90 - x$ $\quad \angle EDB = \angle FDB - \angle FDE =$

$= \alpha + y - y + x = \alpha + x$

$90 - x = \alpha + x$

$90 = 2\alpha + 2x$ $\quad \alpha = 90 - 2x$

$\angle BED = 90 - x$, $\angle AEH = 90 - x$

$\angle EBD = 2x$ $\quad \angle HED = 90 + x$

$\angle AEB = 90 + x$

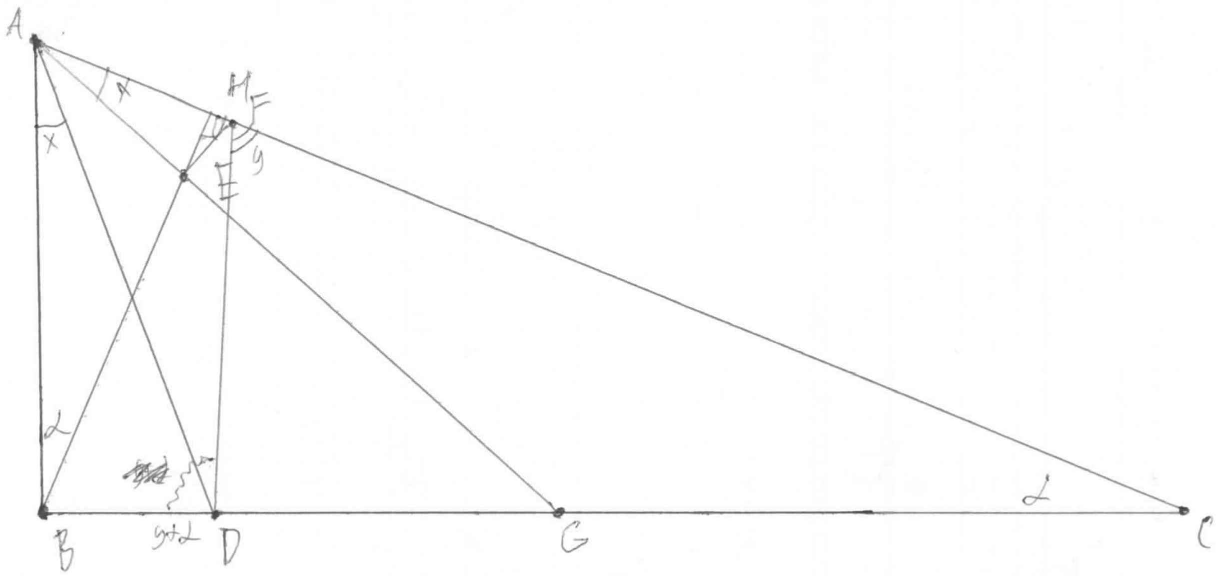
$\angle ABE = 90 - 2x$

$\angle EDB = y + \alpha = \angle FDE + \angle EDB = \cancel{x} + y \cancel{-x} + 90 \cancel{-x}$

$\cancel{y} + \alpha = \cancel{y} + 90$ $\quad \alpha = 90$ — не может быть

См на обороте →

~~Ри~~ ~~р~~ Рисунок к 1 случаю



пусть $\angle BAE = x$; $\angle DFC = y$; $\angle ACB = \alpha$, то

$\cancel{\angle AGC}$ $\angle FDB = y + \alpha$ $\quad$ $\angle ADB = 90 - x$

$\angle BEG = \cancel{x+y}\ 180 - x - y$ $\quad$ $\angle ABH = \alpha$

Шифр: 2-11-07

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020

Ленинградская область

Район Выборгский

Школа СОШ г. Светогорска

Класс 11А

ФИО Мамчанов Иван Романович

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	0	14

№ 1

2-11-07

№6

1). сначала перемножим 2 функции $x+1$ и x^2+1

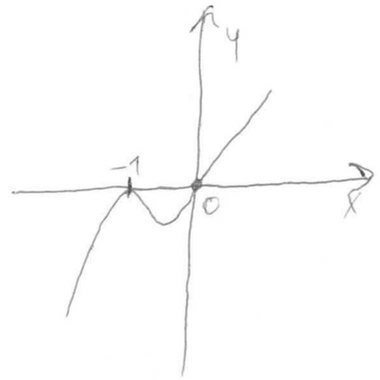
$$\overset{№1}{(x+1)}\,\overset{№2}{(x^2+1)} = x^3+x^2+x+1$$

2). потом вычтем из полученного x^3+1

$$\cancel{x^3}+\cancel{1}+x^2+x+\cancel{1}-\cancel{x^3}-\cancel{1} = x^2+x = x(x+1)$$

3) домножим полученное на $x+1$...

$x(x+1)^2 = x^3+2x^2+x$, её график (схематично):



тогда при $x>0$ $x(x+1)^2 \geq 0$

при $x<0$ $x(x+1)^2 \leq 0$

что и требовалось получить.

№7

Ответ: да можно.

Доказательство:

1). начнём рассматривать все пары слагаемых 2^i, при $i \geq 2$; $2^i = a+b$, где $a \in [1;\ 2^{i-1}-1]$, а $b \in [2^{i-1}+1;\ 2^i-1]$

рассмотрим суммы при $i = 2, 3$ и 4

$2^2 = 4 = 1+3$ и всё, раскрасим их в два разных цвета

далее $\underset{\smile}{d}$ — первый цвет, и $\underline{c}$ — второй цвет, d и c какие-то числа, тогда $4 = \underset{\smile}{1} + \underline{3}$, далее

$2^3 = 8 = \underset{\smile}{1}+7 = 2+6 = \underline{3}+5$, мы два слагаемых и раскрашиваем их в противоположные цвета:

см на обратной стороне л. →

$8 = \underset{\smile}{1} + \underline{7} = 2+6 = \underline{3} + \underset{\smile}{5}$, но у нас нет слагаемых ~~в~~ $2+6$, тогда мы раскрасим их просто в разные цвета:

$8 = \underset{\smile}{2} + \underline{6}$, далее повторим алгоритм раскраски на 2^4

$2^4 = 16 = \underset{\smile}{1} + 15 = \underset{\smile}{2} + 14 = \underline{3} + 13 = 4 + 12 = \underset{\smile}{5} + 11 = \underline{6} + 10 = \underline{7} + 9$

$16 = \underset{\smile}{1} + \underline{15} = \underset{\smile}{2} + \underline{14} = \underline{3} + \underset{\smile}{13} = \underset{\smile}{4} + \underline{12} = \underline{5} + \underline{11} = \underline{6} + \underset{\smile}{10} = \underline{7} + \underset{\smile}{9}$, и так далее

Все степени ~~в~~ двойки,

пусть $2^i = \underline{a} + \underline{b}$, то есть у нас попалось число с тем же цветом, что и a ~~другое~~

то есть b уже попадалась и была в промежутке $[1; 2^{i-1} - 1]$, но b - большее слагаемое и лежит в $[2^{i-1} + 1; 2^i - 1]$, ~~тогда~~ так как у нас нет пересечений у этих двух промежутков, то такое не может быть. Значит при разложении 2^i ~~мы~~ на слагаемые мы можем получить только:

$2^i = \underline{a} + b$ — раскрасим $\underset{\smile}{b}$

$2^i = \underset{\smile}{a} + b$ — раскрасим $\underline{b}$

$2^i = a + b$ — раскрасим $\underset{\smile}{a}$ и $\underline{b}$

тогда мы можем это сделать всегда, кроме 2^0 и 2^1, так как они не имеют разложений на слагаемые в натуральных числах, что и требовалось доказать.

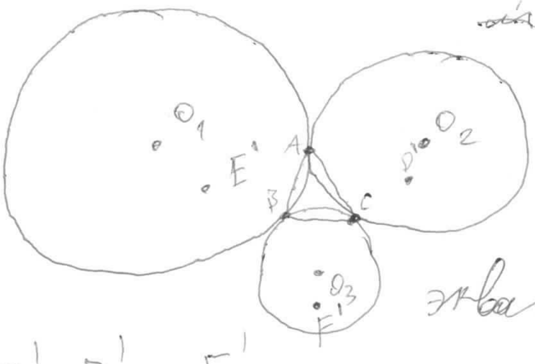
2-11-07

N8

$\sin x$, a, $\cos y$, $\sin y$, $\cos x$ – ~~действительные~~ рациональные числа, т. к. если a и b – иррациональные, дают в ~~ответе~~ сумме рациональное только если $a+b=0$, но $\sin x+\cos y>0$, поэтому они рациональные, тогда если $\sin x>0$ или $\cos x\geq 0$, то любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\sin x=\frac{k}{m}$, где k и $m\in N$ и $\cos x=\frac{1}{n}$, если ~~$\sin x<0$~~ одно из них отрицательное, то увеличиваем коэффициент перед положительным, пока не добьемся положительной суммы

если $\sin x<0$ и $\cos x<0$, то $\cos y>0$ и $\sin y>0$

N9



– сечения плоскостью ABC
Окружности на рисунке являются экваторами сфер

E', D' и F' – проекции E, D и F на эту плоскость они попадают внутрь окружностей

N2

№~~1~~10

Ответ: $n = 7$

Доказательство:

~~при~~ $n = 7$:

~~Петя~~ Вася спрашивает различные числа у Пети:

$t_1; t_2; t_3; t_4; t_5; t_6; t_7$

и ~~Пет~~ получает от Пети:

$y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6; y_7$, соответственно, далее по принципу Дирихле понимаем, что хотя бы 4 из этих пар $(t_i; y_i)$ принадлежат одной функции, осталось их только найти:

3 из ~~них~~ 7 берём как основу: $(t_i; y_i); (t_j; y_j); (t_k; y_k)$

$$\begin{cases} a t_i^2 + b t_i + c = y_i \\ a t_j^2 + b t_j + c = y_j \\ a t_k^2 + b t_k + c = y_k \end{cases}$$

~~а~~ из системы получаем a, b и c ~~подставим~~ если найдётся пара $(t_m; y_m)$ такая, что: $a t_m^2 + b t_m + c = y_m$, то мы получили ~~одну~~ и из ~~функций~~ многочленов, иначе берём другие 3 пары и считаем заново

при $n = 6$ у нас ~~будет~~ может быть 3 точки из одного и 3 точки из другого, из-за чего мы не сможем проверить ~~свои~~ свои ~~суждения~~ предположение a, b и c, потому что через любые 3 точки можно провести параболу